TITLE:

D. Siersmaの非孤立特異点に付随するD-加群とPoincaré-Birkhoff-Witt代数 (数式処理とその周辺分野の研究)

AUTHOR(S):

田島, 慎一

CITATION:

田島, 慎一. D. Siersmaの非孤立特異点に付随するD-加群とPoincaré-Birkhoff-Witt代数 (数式処理とその周辺分野の研究). 数理解析研究所講究録 2017, 2054: 126-133

ISSUE DATE:

2017-10

URL:

http://hdl.handle.net/2433/237153

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅

Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
第2054巻 2017年 126-133

D. Siersma の非孤立特異点に付随する D-加群と Poincaré-Birkhoff-Witt 代数

田島慎一*
TAJIMA, SHINICHI
筑波大学大学院数理物質系数学域
GRADUATE SCHOOL OF PURE AND APPLIED SCIENCES, UNIVERSITY OF TSUKUBA

Abstract

Annihilator ideals of f^s, in the ring of partial differential operators $D_X[s]$, associated with transverse A_1 type singularities are considered in the context of symbolic computation. It is shown that a method introduced by Briançon - Maisonobe can be effectively used to compute Gröbner bases of the annihilator ideals.

1 序

1983年に D. Siersma は, 特異点集合 Σ が複素1次元の line となる超曲面 S で transverse A_1-type, 即ち, 「超曲面を定義する正則関数 f を特異点集合 Σ の (原点以外の) generic な点 P を通り, Σ と transversal となる超平面 H_P に制限することで得られる H_P 上の正則関数 $f|_{H_P}$ が点 P において Morse 型の孤立特異点のみを持つような非孤立特異点」を扱った論文を発表した. 2014 年に本稿の筆者は梅田陽子と共同で, 代数解析の観点からこれら transverse A_1-type singularity を持つ超曲面に付随して定義されるある種の D-加群の構造を解析しその局所 cohomology 解及び b-関数の研究を行った. その際, まず Briançon-Maisonobe の方法を用いることで, f^s の偏微分作用素環における annihilator を具体的に求めた. 本稿では, これらの研究で用いた annihilator $ann_{D_X[s]}(f^s)$ の計算法について紹介する.

2 基本概念

この節では, 本稿で用いる偏微分作用素環及び Briançon-Maisonobe による annihilator の構成法を適用する際に用いる Poincaré-Birkhoff-Witt 代数の定義を与える.

*tajima@math.tsukuba.ac.jp

$X=\mathbb{C}^n, x=(x_1,x_2,...,x_n)\in X$ とし, n 変数の Weyl 代数 (多項式係数の線形偏微分作用素環) $\mathbb{C}[x,\frac{\partial}{\partial x}]=\mathbb{C}[x_1,x_2,...,x_n,\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},...,\frac{\partial}{\partial x_n}]$ を D_X で表す. 更に, この D_X に $x_is=sx_i, \frac{\partial}{\partial x_i}s=s\frac{\partial}{\partial x_i}, i=1,2,...,n$ を満たす不定元 s を加えた環 $D_X[s]$ を考える. 偏微分作用素環 $D_X[s]$ は, D_X の要素を係数に持つ s にかんする多項式全体のなす環であり, $P\in D_X[s]$ は, s に関する次数を m とおくと

$$P=\sum_{j=0}^{m}P_js^j,\quad P_j\in D_X$$

と表せる.

ここで, n 変数多項式 $f(x)\in\mathbb{C}[x]$ に対し, f^s を考え, 環 $D_X[s]$ における f^s の annihilator を $ann_{D_X[s]}(f^s)$ で表す. 定義より $ann_{D_X[s]}(f^s)$ は, $D_X[s]$ の左イデアルであり,

$$ann_{D_X[s]}(f^s)=\{P\in D_X[s]\mid Pf^s=0\}$$

で与えられる.

この annihilator $ann_{D_X[s]}(f^s)$ は, 70 年代初めに柏原正樹により導入された概念であり ([7, 8]), b-関数の理論や P. Deligne の vaniching cycles と深く関係していることが知られている ([8, 9, 12, 13]). 1997年の論文 [15] において, 大阿久俊則は annihilator $ann_{D_X[s]}(f^s)$ を構成するアルゴリズムを導き, annihilator $ann_{D_X[s]}(f^s)$ を用いることで b-関数を求めるという画期的な結果を得ている. その後, 2002年になり, Briançon と Maisonobe は, Poincaré-Birkhoff-Witt 代数 ([23]) におけるグレブナ基底計算 ([3]) により annihilator $ann_{D_X[s]}(f^s)$ を求めるというアルゴリズムを提唱した ([2]). 本稿では, Briançon-Maisonobe が与えた計算法の利用例について紹介する..

最後に, Poincaré-Birkhoff-Witt 代数 $D_X[s,\frac{\partial}{\partial t}]$ の定義を与える. これは, 偏微分作用素環 $D_X[s]$ に, $\frac{\partial}{\partial t}$ を,

$$\frac{\partial}{\partial t}s=s\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t}\tag{1}$$

を満たすとして加えた環として与えられる. この関係は一見すると不自然に感じられるが, 不定元 s は実際には $(-\frac{\partial}{\partial t})t$ を意味するので,

$$\frac{\partial}{\partial t}s=\frac{\partial}{\partial t}(-\frac{\partial}{\partial t})t)=\frac{\partial}{\partial t}(-t\frac{\partial}{\partial t}-1)=s\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t}$$

からわかるように, s と $\frac{\partial}{\partial t}$ の関係 (1) は, 通常の交換関係 $\frac{\partial}{\partial t}t-t\frac{\partial}{\partial t}=1$ を書き直したものに他ならない.

3 Briançon-Maisonobe の方法

この節では, 2002 年に Briançon と Maisonobe が発表した $ann_{D_X[s]}(f^s)$ の計算法の概略を与える ([2]). まず, n 変数多項式 $f(x)\in\mathbb{C}[x]$ に対し,

$$f\frac{\partial}{\partial t}+s,\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x_n}$$

が Poincaré-Birkhoff-Witt 代数 $D_X[s, \frac{\partial}{\partial t}]$ において生成する左イデアルを I とおく．次に，$\frac{\partial}{\partial t} \succ \{s, x_i, \frac{\partial}{\partial x_i}, i = 1, 2, ..., n\}$ を満たすような (block) 項順序を選び，イデアル I のグレブナ基底 G_{PBW} を求める．最後に，この G_{PBW} と $D_X[s]$ の共通部分，即ち，G_{PBW} の要素であり，$\frac{\partial}{\partial t}$ を含まないものからなる集合を G とする．このとき，次が成り立つ．

(i) G は $D_X[s]$ において左イデアル $ann_{D_X[s]}(f^s)$ を生成する．

(ii) G は，$ann_{D_X[s]}(f^s)$ のグレブナ基底である．

ただし，$D_X[s]$ 上の項順序は，G_{PBW} を求める際に用いた項順序が $D_X[s]$ に定める項順序である．

例 $f(x, y) = xy^2$
まず，

$$
\begin{aligned}
A_0 &= f\frac{\partial}{\partial t} + s = xy^2 f\frac{\partial}{\partial t} + s,\\
A_1 &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} = y^2\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x},\\
A_2 &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} = 2xy\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}
\end{aligned}
$$

とおく．[リスト L を $L = [A_0, A_1, A_2]$ で定め，さらに，A_0, A_1, A_2 が $D_Xs, \frac{\partial}{\partial t}]$ において生成するイデアルを I とおく．Poincaré-Birkhoff-Witt 代数 $D_X[s, \frac{\partial}{\partial t}]$ 上に block order の項順序 $\frac{\partial}{\partial t} \succ s \succ \{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, x, y\}$ を入れる．ただし，$\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, x, y\}$ における項順序，

$$
x^{i_1}y^{j_1}(\frac{\partial}{\partial x})^{\alpha_1}(\frac{\partial}{\partial y})^{\beta_1} \succ x^{i_2}y^{j_2}(\frac{\partial}{\partial x})^{\alpha_2}(\frac{\partial}{\partial y})^{\beta_2}
$$

は，(i) $\alpha_1 + \beta_1 > \alpha_2 + \beta_2$，または (ii) $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2$ かつ，$i_1 + j_1 > i_2 + j_2$，または (iii) $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2$ かつ，$i_1 + j_1 = i_2 + j_2$，かつ $i_1 > i_2$ とする．イデアル I のグレブナ基底を求めるために，リスト L に属す要素に対し，S-多項式 $S(A_0, A_1), S(A_0, A_2), S(A_1, A_2)$ を計算する．

$$
\begin{aligned}
B &= S(A_0, A_1) = s - x\frac{\partial}{\partial x},\\
B_0 &= S(A_0, A_2) = 2s - y\frac{\partial}{\partial y},\\
B_1 &= S(A_1, A_2) = 2x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}
\end{aligned}
$$

を得る．リスト L を $L = [A_0, A_1, A_2, B, B_0, B_1]$ と更新する．更に，

$$
B = \frac{1}{2}(B_0 - B_1), A_0 = xA_1 + B
$$

より, $L=[A_1,A_2,B_0,B_1]$ と更新する. リスト L の要素に属す組に対し, S-多項式の計算をする.

$$\begin{aligned} S(A_1,B_0) &= 2sA_1 - y^2\frac{\partial}{\partial t}B_0 \\ &= 2y^2 s\frac{\partial}{\partial t} + 2s\frac{\partial}{\partial x} - 2y^2\frac{\partial}{\partial t}s + y^3\frac{\partial^2}{\partial y\partial t} \end{aligned}$$

であるが, ここで, 基本関係式 (1)

$$\frac{\partial}{\partial t}s = s\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}$$

を用いると, 与式は

$$y^3\frac{\partial^2}{\partial y\partial t} + 2y^2\frac{\partial}{\partial t} + 2s\frac{\partial}{\partial x}$$

と変形できる. ここで

$$y\frac{\partial}{\partial y}A_1 = y^3\frac{\partial^2}{\partial y\partial t} + 2y^2\frac{\partial}{\partial t} + y\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}$$

を用いて,

$$S(A_1,B_0) \equiv 2s\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}$$

を得る. 更に

$$\frac{\partial}{\partial x}B_0 = 2s\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}$$

より,

$$\overline{S(A_1,B_0)}^L \equiv 0$$

を得る. 同様の計算で

$$\overline{S(A_2,B_0)}^L \equiv \overline{S(A_1,B_1)}^L \equiv \overline{S(A_2,B_1)}^L \equiv \overline{S(B_0,B_1)}^L \equiv 0$$

を確かめることができる. 従って, グレブナ基底 $G_{PBW}=[A_1,A_2,B_0,B_1]$ を得た.

消去イデアル $I\cap D_X[s]$, のグレブナ基底 $G_{PBW}\cap D_X[s]$ は, $[A_1,A_2,B_0,B_1]\cap D_X[s]$ 即ち

$$[B_0,B_1] = [2s - y\frac{\partial}{\partial y}, 2x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}]$$

で与えられる. これが $ann_{D_X[s]}(f^s)$ のグレブナ基底そのものである.

4 計算例

D. Siersma は論文 [17] において基本的な simple line singularity, 現在 transverse A_1 型特異点と呼ばれる非孤立特異点に関する研究を行った. 以下は, S. Siersma が与えたリストである.

D_∞	xy^2	
$J_{k,\infty}$	$y^3+x^ky^2,$	$(k\geq 2)$
$T_{\infty,k,2}$	$x^2y^2+y^k,$	$(k\geq 4)$
$Z_{k,\infty}$	$xz^3+x^{k+2}y^2,$	$(k\geq 1)$
$W_{1,\infty}$	$y^4+x^3y^2$	
$T_{\infty,q,r}$	$xyz+y^q+z^r,$	$(q+r\geq 6)$
$Q_{k,\infty}$	$xz^2+y^3+x^ky^2,$	$(k\geq 2)$
$S_{1,\infty}$	$y^2z+xz^2+x^2y^2$	

これらのうち, $J_{k,\infty}, T_{\infty,k,2}, Z_{k,\infty}, T_{\infty,q,r}, Q_{k,\infty}$ の 5 つは超曲面の定義多項式の指数部分にパラメータを含んでいる. ひとつひとつのパラメータ値に対しては, 数式処理システム Risa/Asir に実装された大阿久俊則のアルゴリズム *ann* を用いることで, $ann_{D_X[s]}(f^s)$ の生成元を求めることができる. しかし, パラメータすべてに対し annihilator のグレブナ基底の一般式を求めるということは計算機を用いたこの方法ではできない. そこで, 執筆準備中の論文 [22] では, Briançon-Maisonobe の方法を用いて, これら非孤立特異点を定める多項式に付随する annihilators のグレブナ基底の一般式を手計算で求めた. この節では, $J_{k,\infty}$ の場合の計算を紹介する. 計算に用いる項順序は前の節で与えた例と同じとする.

例 $J_{k,\infty}$ 特異点 $f(x,y)=x^ky^2+y^3$

まず,

$$\begin{aligned}
A_0 &= (x^ky^2+y^3)\frac{\partial}{\partial t}+s,\\
A_1 &= kx^{k-1}y^2\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x},\\
A_2 &= (2x^ky+3y^2)\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y},
\end{aligned}$$

とおき, リスト L を $L=[A_0,A_1,A_2]$ と初期化する. 次に, S-多項式

$$B=S(A_0,A_1), B_0=S(A_0,A_2), B_1=S(A_1,A_2),$$

を求めると

$$\begin{aligned}
B &= ky^3\frac{\partial}{\partial t}+ks-x\frac{\partial}{\partial x},\\
B_0 &= -y^3\frac{\partial}{\partial t}+2s-y\frac{\partial}{\partial y},\\
B_1 &= -3ky^3\frac{\partial}{\partial t}+2x\frac{\partial}{\partial x}-ky\frac{\partial}{\partial y},
\end{aligned}$$

を得る. ここで,

$$B_2 = B + kB_0 = 3ks - x\frac{\partial}{\partial x} - ky\frac{\partial}{\partial y}$$

とおく.

$$A_0 = \frac{1}{k}xA_1 + \frac{1}{k}B,\ B = -\frac{1}{3}B_1 + \frac{1}{3}B_2,\ B_0 = \frac{1}{3k}B_1 + \frac{2}{3k}B_2$$

に注意して, リスト L を $L = [A_1, A_2, B_1, B_2]$ と更新する. 再び, S-多項式の計算を行う.

$$C = S(A_1, B_1) = 3yA_1 + x^{k-1}B_1$$

を求め,

$$C = (2x^k + 3y)\frac{\partial}{\partial x} - kx^{k-1}y\frac{\partial}{\partial y}$$

を得る. 次に S-多項式

$$S(A_2, B_1) = 3ky^2A_2 + 2x^kB_1$$

を求めると

$$S(A_2, B_1) = 9ky^4\frac{\partial}{\partial t} + 4x^{k+1}\frac{\partial}{\partial x} + (-2kx^ky + 3ky^2)\frac{\partial}{\partial y}$$

となるが,

$$3yB_1 = -9ky^4\frac{\partial}{\partial t} + 6xy\frac{\partial}{\partial x} - 3ky^2\frac{\partial}{\partial y}$$

より

$$\overline{S(A_2, B_1)}^L \equiv 2xC$$

を得る. ここで, リスト L を $L = [A_1, A_2, B_1, B_2, C]$ と更新する. S-多項式の計算を行うことで, L が $D_X[s, \frac{\partial}{\partial t}]$ におけるグレブナ基底 G_{PBW} であることを確かめることができる. 消去イデアル, 即ち $ann_{D_X[s]}(f^s)$ のグレブナ基底 $G_{PBW} \cap D_X[s]$ は,

$$[B_2, C] = [3ks - x\frac{\partial}{\partial x} - ky\frac{\partial}{\partial y},\ (2x^k + 3y)\frac{\partial}{\partial x} - kx^{k-1}y\frac{\partial}{\partial y}]$$

で与えられる. グレブナ基底を求める際の計算が 冪 k に依らず同じ手順で行えるので, 手計算で $ann_{D_X[s]}(f^s)$ を求めることが容易であった.

D. Siersma の論文 [17] にある具体例に関しては, 同様の方法で annhilators のグレブナ基底を求めることができる. 具体的な結果については [22] を参照されたい.

Briançon-Maisonobe の計算法に関しては, 文献 [2, 5, 6, 10, 11] を参照されたい. Poincaré-Birkhoff-Witt 代数におけるグレブナ基底計算の Risa/Asir への実装に関しては [16] に説明がある. Annihilator $ann_{D_X[s]}(f^s)$ と特異点論との関係, 応用については, [19, 20, 21, 22] 等で論じている.

参考文献

[1] D. Andres, V. Levandovskyy and J. Martín-Morales, Effective methods for the computation of Bernstein-Sato polynomials for hypersurfaces and affine varieties, preprint.

[2] J. Briançom et P. Maisonobe, Remarques sur l'ideal de Bernstein associe des polynomes, Preprint No. 650 (2002), Univ. Nice Sophia-Antipolis.

[3] J. L. Buesco, J. Gómez-Torrecillas and A. Verschoren, Algorithmic Methods in Non-Commutative Algebra – Applications to Quantum Groups, Kluwer (2003).

[4] P. Deligne, Le formalisme des cycles évanescents, SGA 7, II, exposés 13, Lecture Notes in Math. **340** (1973), 82–115.

[5] J. Gago-Vargas, M. I. Hartill-Hermoso and J. M. Ucha-Enríquez, Nouvelle cuisine for the computation of the annihilating ideal of f^s,

[6] J. Gago-Vargas, M. I. Hartill-Hermoso and J. M. Ucha-Enríquez, Comparison of theoretical complexities of two methods for computing annihilating ideals of polynomials, J. Symbolic Computation, **40** (2005), 1076–1086.

[7] 柏原正樹, b 函数と超曲面の特異性, 京都大学数理解析研究所講究録, **225** (1975), 16–53.

[8] M. Kashiwara, B-functions and holonomic systems – Rationality of roots of b-functions, Invent. Math. **38** (1976/77), 33–53.

[9] M. Kashiwara, Vanishing cycles for holonomic systems, Lecture Notes in Math. **1016** (1983), 134–142.

[10] V. Levandovskyy and H. Schönemann, Plural - a computer algebra system for noncomutative polynomial algebra, International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (2003), 176–180.

[11] Ph. Maisonobe and C. Sabbah, Aspects of the theory of D-modules, Lecture Notes, Kaiserlautern, 2002.

[12] B. Malgrange, Le polynôme de Bernstein d'une singularité isolée, *Lecture Notes in Math* **459** (1974), 98–119.

[13] B. Malgrange, Polynômes de Bernstein-Sato et cohomologies évanescents, Astérisques **101-102** (1983), 243–267.

[14] K. Nabeshima, K. Ohara and S. Tajima, Comprehensive Gröbner systems in rings of differential operators, holonomic D-modules and b-functions, submitted

[15] T. Oaku, Algorithms for the b-function and D-modules associated with a polynomial, J. Pure and Applied Algebra, **117, 118** (1997), 495–518.

[16] 小原功任, 田島真一, Poincaré-Birkhoff-Witt 代数上のグレブナ基底計算と Risa/Asir への実装, 数理解析研究所講究録投稿準備中.

[17] D. Siersma, Isolated line singularities, Proc. Symposia in Pure Math. **40** Part 2 (1983), 485–496.

[18] D. Siersma, Variation mappings on singularities with a 1-dimensional critical locus, Topology **30** No. 3 (1991), 445–469.

[19] S. Tajima, On b-functions and algebraic local cohomology classes attached to hypersurfaces with line singularities, RIMS Kôkyûroku Bessatsu **52** (2014), 175–191.

[20] 田島慎一, D. Siersma の vertical monodromy とホロニミー D-加群, 研究集会「特異点と多様体の幾何学 (於, 草津)」報告集 (2015), 168–186.

[21] S. Tajima and Y. Umeta, Computing structure of holonomic D-modules associated with a simple line singularity, to appear in RIMS Kôkyûroku Bessatu.

[22] S. Tajima and Y. Umeta, 投稿準備中

[23] 谷崎俊之, リー代数と量子群, 共立出版 (2002).